

# Метод расчета ультразвуковых излучателей на основе изгибных колебаний дисков ступенчато-переменной формы

[В.Н. Хмелёв](#), В.А. Киданов, [А.В. Шалунов](#), [А.Н. Лебедев](#)

Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО АлтГТУ им И.И. Ползунова, Бийск,  
Россия

**Аннотация** – В статье приводится метод расчета формы дисковых излучателей ступенчато-переменной типа исходя из требований технологического процесса и геометрических размеров диска.

**Ключевые слова** – Колебательная система, дисковый излучатель, диск ступенчато-переменной формы.

## I. ВВЕДЕНИЕ

**АЭРОЗОЛИ** – дисперсные системы с газообразной дисперсионной средой и твердой (дым, пыль) или жидкой (туман) дисперсной фазой. По происхождению различают диспергированные (техногенные) и конденсационные аэрозоли. Конденсационные аэрозоли образуются при объемной конденсации паров – это природные туманы, облака, а также аэрозоли, возникающие над сильно нагретыми телами в результате испарения из них (например, почвы) влаги и последующего охлаждения паров при перемешивании с более холодным воздухом.

Источниками природных аэрозолей являются землетрясения, извержения вулканов, метеоритная и космическая пыль. Источниками техногенных аэрозолей могут быть различные аварии, вредные выбросы предприятий, атаки террористов, направленные на биологическое или химическое поражение людей в местах массового скопления.

В связи с широким распространением потенциально опасных производств (выбросы аэрозолей ядовитых веществ) и резко возросшей опасностью проведения террористических актов с распылением химического или биологического поражающего вещества, возникает необходимость в создании эффективных средств подавления аэрозолей.

В настоящее время, для улавливания частиц дисперсной фазы аэрозоля используются традиционные пылеулавливатели, пылевые камеры для выделения крупных пылинок, инерционные, батарейные, жалюзийные и мокрые циклоны, в том числе электрофильтры, тканевые фильтры. Все эти устройства не пригодны для скоростного подавления аэрозолей, особенно в закрытых объемах (воздуховодах) и на открытых пространствах, в частности для осаждения тумана на взлетно-посадочных полосах аэродромов и при движении морских судов в тумане.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решением проблемы очистки воздуха от мелкодисперсной пыли и аэрозолей может быть акустическая коагуляция. Основным требованием при реализации данного вида коагуляции является использование ультразвуковых колебаний, как наиболее безопасных для человека. В настоящее время для коагуляции используются аэродинамические излучатели, работа которых основана на принципе преобразования кинетической энергии газового потока в энергию акустических колебаний. Однако у данного типа излучателей присутствует ряд недостатков, таких как наличие гармоник в слышимом диапазоне частот и сложность получения большой мощности излучения.

Поэтому в качестве излучателя использована пьезоэлектрическая колебательная система, преобразующая продольные колебания пьезоэлектрического преобразователя в изгибные колебания титановых дисков.

Распределение изгибных колебаний представлено на Рис.1. Как видно из рисунка, соседние участки диска колеблются с противоположной фазой. Поэтому излучение одного участка будет гасить излучение другого участка и наоборот. Чтобы этого не происходило, необходимо уменьшить амплитуду колебаний одного участка диска и увеличить амплитуду другого участка. Это можно сделать, изменив толщину соответствующих участков [1]. Ступенчато-переменная форма диска также позволяет избавиться от паразитных гармоник, ухудшающих коэффициент полезного действия диска. Выбору данных участков и их толщины и посвящена эта статья.

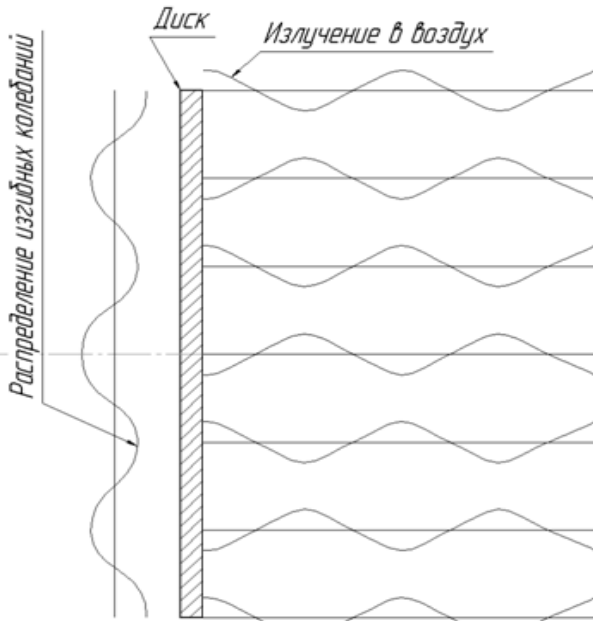


Рис. 1. - Примерное распределение изгибных колебаний по поверхности плоского диска и излучение отдельных точек поверхности диска в воздух.

### III. ТЕОРИЯ

Форма радиально-симметричных (без узловых диаметров) колебаний плоского диска со свободной границей описывается уравнением ([2], [3]):

$$W = AJ_0(kr) + CI_0(kr)$$

Где  $W$  – смещение участка диска на расстоянии  $r$  от его центра. Коэффициент  $k$  определяет моду колебаний диска.

Коэффициенты  $A$  и  $C$  определяются исходя из граничных условий:

$$\begin{cases} -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] = 0 \\ -D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] = 0 \end{cases}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

Где  $D$  – так называемая цилиндрическая жесткость на изгиб,  $E$  – модуль упругости,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $h$  – толщина диска.

Из решения данной системы уравнений получается уравнение, определяющее главные моды колебаний диска:

$$\frac{kRJ_0(kR) - (1-\sigma)J_1(kR)}{kRI_0(kR) - (1-\sigma)I_1(kR)} + \frac{J_1(kR)}{I_1(kR)} = 0 \quad (1)$$

Где  $J_0$  и  $J_1$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка,  $I_0$  и  $I_1$  – гиперболические функции Бесселя нулевого и первого порядка,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона.

1. Необходимая частота  $f$  и радиус  $R$  излучателя определяются исходя из требований технологического процесса. Выбор толщины диска должен быть основан на возможности будущего изменения формы диска, придания ему формы

ступенчато-переменного вида. То есть новая, полученная на основе расчетов, толщина диска не должна выходить за рамки геометрических размеров имеющихся материалов.

2. Исходя из выбранных параметров задается номер гармоники  $s$ , с частотой, наиболее близкой к требуемой. Для этого необходимо вычислить собственное значение дифференциального уравнения движения диска  $kR$ . Оно получается решением уравнения (1). Решение уравнения находится методом простых итераций. При решении используется тот факт, что  $kR = \pi s - \varepsilon$ , где  $\varepsilon \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ , что позволяет существенно сократить время вычислений, приняв за начальное приближение  $kR = \pi s$ .

Значение  $kR$  связано с резонансной частотой диска соотношением:

$$kR = R\sqrt{2\pi f \sqrt{\rho h/D}} \quad (2)$$

Где  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала.

В Табл. I. представлены первые несколько возможных значений  $kR$ .

Из Табл. I. находим значение  $kR$ , наиболее близкое к вычисленному, и соответствующий этому значению номер гармоники. После этого уточняем значение собственной частоты  $f$ .

ТАБЛИЦА I

ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ  $kR = R\sqrt{2\pi f \sqrt{\rho h/D}}$  ДЛЯ СВОБОДНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАЗЛИЧНОМ НОМЕРЕ ГАРМОНИКИ;  $\sigma = 0.33$

S	R	s	R
1	3.01	6	18.83
2	6.2	7	21.98
3	9.37	8	25.12
4	12.53	9	28.26
5	15.68	10	31.40

3. Далее необходимо определить радиусы узловых окружностей.

Известно, что на собственных частотах постоянны отношения радиусов узловых окружностей к радиусу диска. Эти величины могут быть найдены из уравнения:

$$\frac{J_0(kR\mu)}{I_0(kR\mu)} = \frac{-(1-\sigma)j_1(kR) + kRJ_0(kR)}{-(1-\sigma)I_1(kR) + kRI_0(kR)} \quad (3)$$

Где  $\mu = r/R$ .

Решения уравнения (3) находятся простым разбиением интервала (0;1) на 10000 равных отрезков с последующим линейным поиском участков на которых рассматриваемая функция меняет знак. Этот метод прост в реализации и позволяет найти все решения уравнения (3), лежащие в вышеозначенном интервале с высокой точностью.

Первые несколько их значений приведены в Табл. II. Из этой таблицы по известному номеру гармоники можно найти количество и радиусы узловых окружностей и, как следствие, ширины и радиусы участков диска с одной фазой, имеющих форму колец.

ТАБЛИЦА II

ОТНОШЕНИЯ РАДИУСОВ УЗЛОВЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ  $r$  К РАДИУСУ ДИСКА  $R$ :  $\mu = r/R$  ДЛЯ НЕЗАКРЕПЛЕННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАЗЛИЧНОМ ИХ КОЛИЧЕСТВЕ;  $\sigma = 0.33$

$s$	$\mu$					
1	0.680					
2	0.391	0.841				
3	0.257	0.591	0.893			
4	0.192	0.441	0.691	0.941		
5	0.154	0.352	0.520	0.752	0.952	

4. Толщины колец выбираются в соответствии со следующими соображениями. Пусть ширина  $i$ -го кольца есть  $d_i$ . Эта ширина содержит ровно половину длины волны для всех колец кроме центрального цилиндра и последнего кольца, где содержится четверть длины волны. Разная ширина колец обуславливается тем, что скорость распространения изгибных колебаний изменяется вдоль радиуса диска, уменьшаясь при увеличении расстояния от центра. Рассмотрим  $i$ -е кольцо. В ширине этого кольца содержится пол длины волны. Среднюю скорость колебаний на этом участке можно найти по формуле:

$$C_i = f\lambda_i = 2d_i f$$

Из формулы (2) получим:

$$f = \frac{(kR)^2}{2\pi R^2 \sqrt{\rho h/D}}$$

$$C_i = \frac{d_i (kR)^2}{\pi R^2 \sqrt{\rho h/D}} = \frac{d_i (kR)^2}{\pi R^2 \sqrt{12\rho(1-\sigma^2)/E}} h$$

Т.е. скорость звука, и, как следствие, длина волны, при условии колебаний пластины на частоте соответствующей определенной моде, пропорциональна толщине пластины.

При изменении толщины  $i$ -го кольца длина изгибных колебаний  $\lambda_i$  также изменится в соответствии с формулой

$$\lambda_i = \frac{d_i (kR)^2}{\pi R^2 \sqrt{12\rho(1-\sigma^2)/E}} h$$

Где  $E$  – модуль юнга,  $\rho$  – плотность,  $f$  – частота колебаний. Чтобы ширина этого кольца равнялась половине новой длины волны, ее необходимо изменить в соответствии с соотношением:

$$\frac{d_i}{\lambda_i} = \frac{d'_i}{\lambda'_i}$$

Откуда:

$$d'_i = d_i \frac{h_i}{h} \quad (4)$$

Где  $d'_i$  – новая ширина  $i$ -го кольца.

Сумма ширин колец должна равняться радиусу диска, т.е.

$$R = \sum_i^s d'_i$$

Окончательно получаем:

$$R = \sum_i^s \left( d_i \frac{h_i}{h} \right) \quad (5)$$

Таким образом, чтобы собственная частота диска ступенчато-переменной толщины была равна собственной частоте исходного диска, должно выполняться вышеприведенное уравнение. Как правило, не стоит использовать более 4-5 колец разной толщины. Тогда из уравнения (5) получится уравнение, содержащее 4-5 неизвестных, которое может быть решено путем наложения дополнительных ограничений. На данном этапе получают толщины колец как больше, так и меньше чем толщина базового диска. Это необходимо учитывать при выборе базовой толщины  $h$ .

Также толщина кольца с наибольшим радиусом должна быть меньше базовой толщины, т.к. при этом амплитуда колебаний этого кольца будет максимальна.

5. Из уравнения (4), используя найденные толщины колец, находим ширину каждого кольца.

## V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для примера рассмотрим диск со следующими параметрами:

1. толщина базового диска  $h = 6$  мм,
2. номер моды  $s = 3$ ,
3. радиус диска  $R = 100$  мм,
4. толщины четных колец равны между собой и равны  $h'$ ,
5. толщины нечетных колец равны между собой и равны  $2h'$

Расчет толщин и ширин колец диска производится в следующей последовательности:

По номеру моды  $s$  из Табл. II. находим значения отношений радиусов узловых окружностей к радиусу диска:  $\mu_1=0.257, \mu_2=0.591, \mu_3=0.893$ .

Умножив эти значения на радиус диска  $a$ , получим радиусы узловых окружностей:  $r_1=R*\mu_1=25.7$  мм,  $r_2=R*\mu_2=59.1$  мм,  $r_3=R*\mu_3=89.3$  мм.

Из радиусов узловых окружностей получим ширины колец плоского диска, колеблющихся с одной фазой:  $d_1=r_1=25.7$  мм,  $d_2=r_2-r_1=33.4$  мм,  $d_3=r_3-r_2=30.2$  мм,  $d_4=R-r_3=10.7$  мм.

Подставим полученные значения ширин колец в уравнение (4). Оно примет вид:

$$d_1 \frac{2h'}{h} + d_2 \frac{h'}{h} + d_3 \frac{2h'}{h} + d_4 \frac{h'}{h} = a$$

Окончательно получим уравнение для получения толщины четных колец ступенчато переменного диска.

$$h' = \frac{Rh}{2(d_1 + d_3) + (d_2 + d_4)}$$

Подставив числовые значения ширин колец, радиуса и толщины базового диска, определим значения толщин четных и нечетных колец:  $h' = 3.8$  мм,  $2h' = 7.7$  мм.

Ширины новых колец определяются по формуле:

$$d'_i = d_i \frac{h_i}{h}$$

Откуда:  $d_1=32.9$  мм,  $d_2=21.4$  мм,  $d_3=38.7$  мм,  $d_4=6.8$  мм.

Собственная частота колебаний диска на данной моде, согласно уравнению (2), будет равна 13246 Гц.

## VI. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На Рис.2. представлены формы колебаний плоского и рассчитанного ступенчато-переменного дисков. С помощью программного пакета COMSOL было получено распределение уровня звукового давления вблизи диска. На Рис.3. представлена диаграмма направленности уровня звукового давления, создаваемого колебаниями этих дисков на собственной частоте. Уровень звукового давления представлен для расстояния 400 мм от центра диска. Из этой диаграммы хорошо видно, что в случае ступенчато-переменного диска уровень звукового давления в направлении вдоль оси диска возрастает приблизительно на 7%.



Рис. 2.- Форма колебаний плоского и ступенчато-переменного дисков.

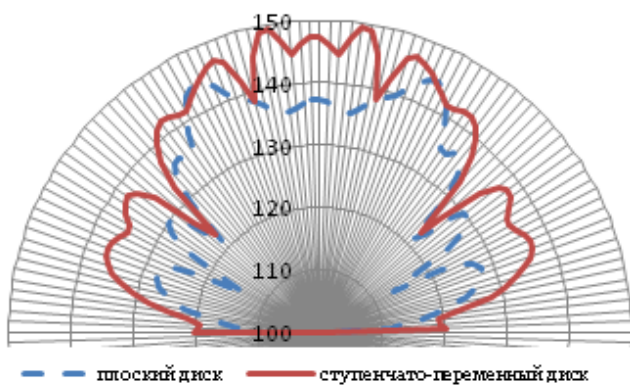


Рис. 3.- диаграмма направленности уровня звукового давления создаваемого излучением плоского и ступенчато-переменного дисков. Дб.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] [Многочастотная ультразвуковая колебательная система с дисковым излучателем](#) [текст] / В.Н. Хмелев, А.Н. Лебедев, С.Н.Цыганок, А.В.Шалунов, А.Н. Галахов, К.В. Шалунова
- [2] Arthur W Leissa. Vibration of Plates[текст] / Arthur W Leissa 1969
- [3] Бабаков И.М.Теория колебаний[текст] / Бабаков И.М. “Наука” 1968