

# МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА И ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ДЛЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГАЗОВЫЕ СРЕДЫ

В.Н. Хмелёв, В.А. Киданов, А.В. Шалунов, А.Н. Галахов, А.Н. Лебедев

*Бийский технологический институт, г. Бийск*

В статье представлен метод аналитического расчета и оптимизации формы колебаний ступенчато-переменных излучателей. Показано сравнение приведенного метода с методом конечных элементов.

*Ключевые слова:* колебательная система, излучатель ступенчато-переменной формы.

## ВВЕДЕНИЕ

На настоящий момент основным источником возбуждения ультразвуковых колебаний в жидких и твердых средах являются ультразвуковые колебательные системы, основанные на пьезоэлектрическом и магнитострикционном эффекте. Принцип действия основан на преобразовании электрических колебаний ультразвуковой частоты в механические колебания изгибно колеблющихся плоских дисков или пластин.

Высокие технические характеристики и отсутствие достойных альтернатив делают использование ультразвуковых колебательных систем на пьезоэлектрических элементах единственно возможным выбором для воздействия на газовые среды. Однако, если для воздействия на жидкие и твердые среды размер рабочего инструмента может ограничиваться диаметром приблизительно 35 мм [1], то для воздействия на газовые среды размеры рабочего инструмента необходимо значительно увеличивать. Причина это заключается в существенном различии акустических сопротивлений материала излучателя и воздушной среды, обеспечивающем малый выход энергии с единицы площади излучения.

Возможным решением указанной проблемы является применение излучателей выполненных в виде изгибно-колеблющихся пластин или дисков. Однако при этом возникает ряд трудностей, решению которых посвящена настоящая статья.

Распределение изгибных колебаний плоской пластины на пятой моде вдоль одной из сторон представлено на рис. 1. Как видно из рисунка, соседние участки пластины колеблются с противоположной фазой. Поэтому, на некотором расстоянии, излучение одного участка будет гасить излучение другого участка и наоборот. Чтобы этого не происходило, необходимо уменьшить амплитуду колебаний одного участка пластины и увеличить амплитуду другого участка. Это можно сделать,

изменив толщину соответствующих участков. Поэтому изгибно-колеблющиеся излучатели ступенчато-переменной формы имеют большую эффективность по сравнению с плоскими излучателями.

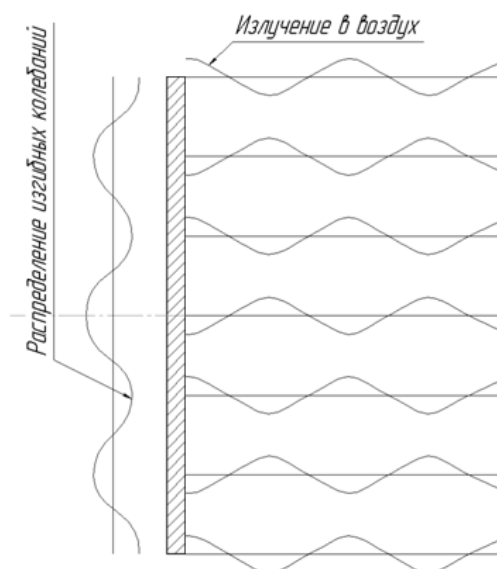


Рис. 1. Примерное распределение изгибных колебаний по поверхности плоской пластины и излучение отдельных точек поверхности пластины в воздух

При разработке изгибно-колеблющихся излучателей необходимо точно знать резонансную частоту, а также форму колебаний излучателя на этой частоте. Знание формы колебаний пластины позволит оценить уровень звукового давления излучения, создаваемого колеблющейся пластиной.

На настоящий момент известны аналитические методы определения резонансной частоты и моды колебаний для пластин и дисков только постоянной толщины. Резонансная частота и форма колебаний пластин и дисков переменной толщины определяется при помощи программных пакетов, использующих в своей основе метод конечных элементов. Основной

недостаток данного метода – высокие требования к вычислительным ресурсам и, как следствие, низкая скорость расчетов. Это затрудняет выбор оптимальной формы пластины, обеспечивающей максимальное излучение ультразвука в окружающую среду.

Для определения резонансной частоты и формы распределения колебаний на поверхности пластины ступенчато-переменной формы предлагается использовать аналитические уравнения, описывающие колебания плоских пластин.

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Колебательное одномерное движение плоской пластины описывается уравнением [1,2]:

$$W(x) = A \cos\left(\frac{kx}{\sqrt{h}}\right) + B \sin\left(\frac{kx}{\sqrt{h}}\right) + C \cosh\left(\frac{kx}{\sqrt{h}}\right) + D \sinh\left(\frac{kx}{\sqrt{h}}\right), \quad (1)$$

где  $h$  – толщина пластины. Коэффициенты  $A, B, C, D$  определяются исходя из граничных условий на краях пластины. Коэффициент  $k$  определяет частоту колебаний пластины:

$$f = \frac{k^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{12(1-\sigma^2)\rho}}, \quad (2)$$

где  $f$  – частота колебаний пластины;  $E$  – модуль Юнга;  $\rho$  – плотность;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона.

Ступенчато-переменную пластину можно представить в виде набора плоских участков соединенных друг с другом. Движение каждого такого участка будет описываться уравнением (1) и своим набором коэффициентов. При этом в месте соединения соседних пластин будут выполняться следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{dW_1} &= \frac{W_2}{dW_2}, \\ \frac{dW_1}{dx} &= \frac{dW_2}{dx}, \\ D_1 \frac{d^2W_1}{dx^2} &= D_2 \frac{d^2W_2}{dx^2}, \\ D_1 \frac{d^3W_1}{dx^3} &= D_2 \frac{d^3W_2}{dx^3}, \end{aligned}$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – амплитуды колебаний первой и второй пластины в месте их соединения;  $D_1$  и  $D_2$  – цилиндрическая жесткость на изгиб первой и второй пластины:

$$D_i = \frac{E h_i^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

На свободных границах пластин сила и момент силы, действующей на пластину, равны 0:

$$\begin{aligned} D \frac{d^2W}{dx^2} &= 0, \\ D \frac{d^3W}{dx^3} &= 0. \end{aligned}$$

Каждое уравнение определяет соотношения между вышеозначенными коэффициентами. Все краевые условия в совокупности дадут систему уравнений,

решение которой даст набор коэффициентов для каждой пластины.

Каждое соединение пластин разной толщины добавляет в систему 4 уравнения. Таким образом, система линейных уравнений, описывающая колебания пластины ступенчато-переменной формы состоящей из 7 плоских участков, будет содержать  $4 \cdot (7 - 1) = 24$  уравнения. Соответственно движение пластины будет описано уравнениями с 24 коэффициентами.

Частота колебаний определяется коэффициентом  $k$  посредством уравнения (2). При колебаниях пластины на собственной частоте должно выполняться равенство:

$$\det(A) = 0, \quad (3)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов вышеупомянутой системы уравнений.

Решение уравнения (3) позволит определить значения коэффициентов  $k$  для собственных колебаний. Таким образом, приравняв определитель матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) к нулю, и решив полученное уравнение относительно  $k$  можно определить частоту и форму собственных колебаний пластины.

Решение СЛАУ проводится методом Гаусса с выбором главного элемента. Нахождение собственных значений происходит методом сканирования.

Определение формы колебаний пластины позволяет определить функциональную зависимость между эффективностью излучения пластины и ее формой. Эффективность излучения определяется как интеграл колебательного смещения пластины  $W$  по поверхности пластины. Величина этого интеграла при определенной моде колебаний есть функция от формы пластины.

Невысокая сложность системы уравнений обеспечивает высокую скорость расчетов, что, в свою очередь, делает возможным применение численных итерационных методов нахождения экстремума функции для определения оптимальной формы пластины. Для этого форма пластины представляется в виде набора параметров. Варьируя эти параметры, определяется максимум эффективности излучения.

В качестве примера рассмотрим пластину, состоящую из семи частей, и имеющую форму, представленную на рис. 2.

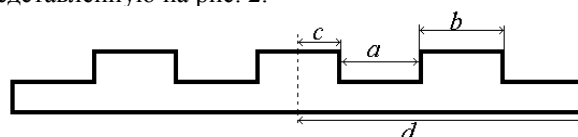


Рис. 2. Форма пластины

Начальные значения параметров  $a, b$  и  $c$  выбираются исходя из формы колебаний плоской пластины так, чтобы положение узлов колебаний

(плоской пластины) совпадало с местом изменения толщины пластины [2].

Варьируя параметры  $a$  и  $b$ , при неизменных параметрах  $c = 15$  мм и  $d = 105$  мм была найдена оптимальная форма пластины, при которой достигается максимум эффективности излучения. На рис. 3 представлена зависимость эффективности излучения от значений параметров  $a$  и  $b$ .

На рисунке отчетливо видны два экстремума, из которых один является глобальным максимумом.

Для определения точности предложенной методики было проведено сравнение расчета распределения колебаний с методом конечных элементов, на пятой моде собственных колебаний прямоугольной пластины ступенчато-переменной формы.

Форма, соответствующая максимуму излучения представлена на рис. 4.

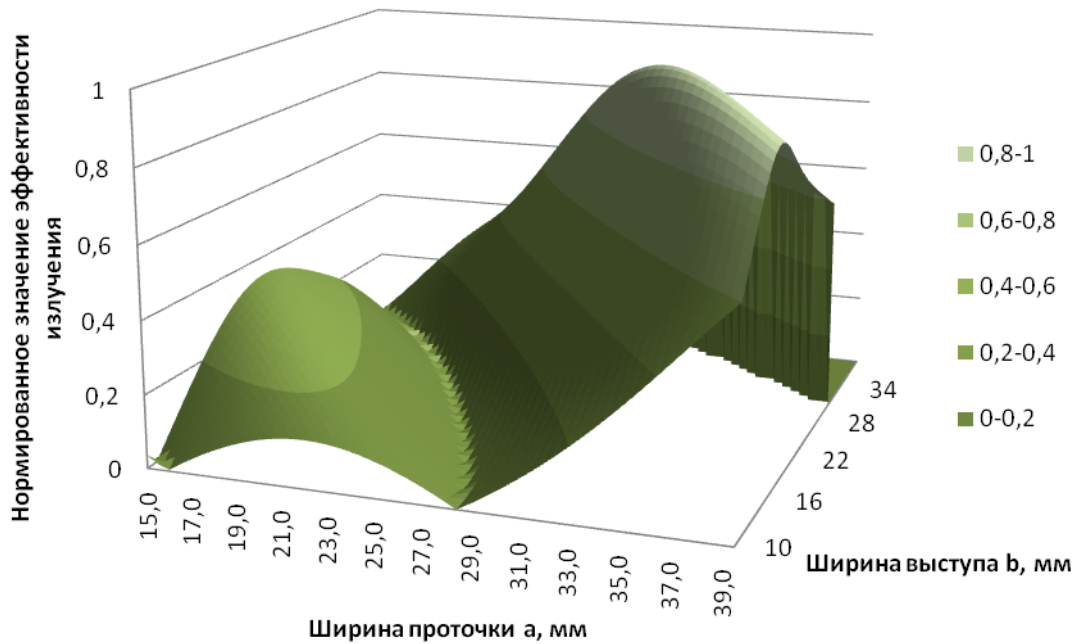


Рис. 3. Зависимость эффективности излучения от параметров  $a$  и  $b$

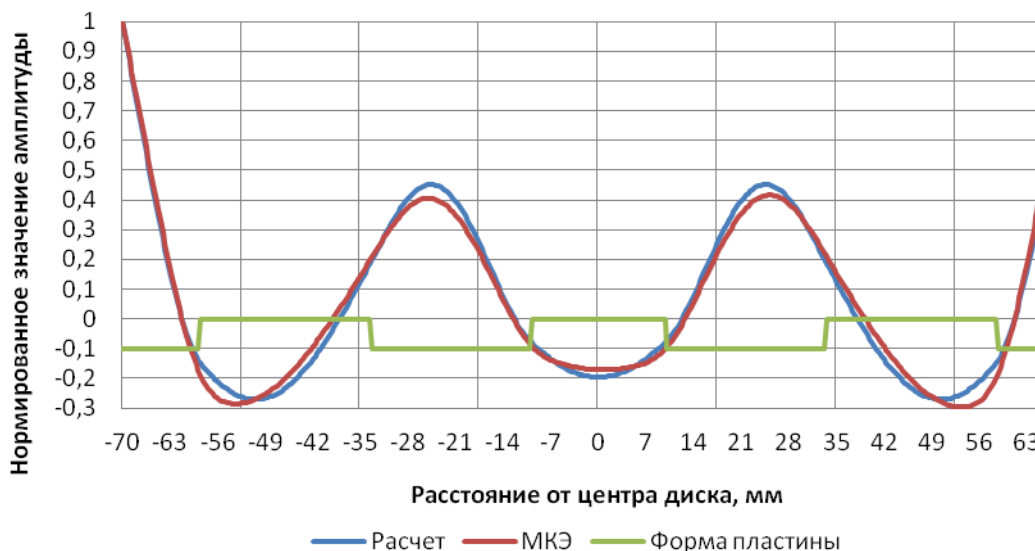


Рис. 4. Сравнение форм колебаний полученных с помощью метода конечных элементов и предложенной аналитической методики

Как видно из рис. 4 формы колебаний лишь незначительно отличаются друг от друга, что говорит о высокой точности предложенного метода и возможности его дальнейшего применения для расчета и оптимизации конструкции ступенчато-переменных излучателей для воздействия на газовые среды. Стоит отметить, что расчет оптимальных параметров по приведенной методике занял не более 10 секунд.

На рис. 5 представлены диаграммы направленности уровня звукового давления создаваемого излучением плоской и ступенчато-переменной пластины.

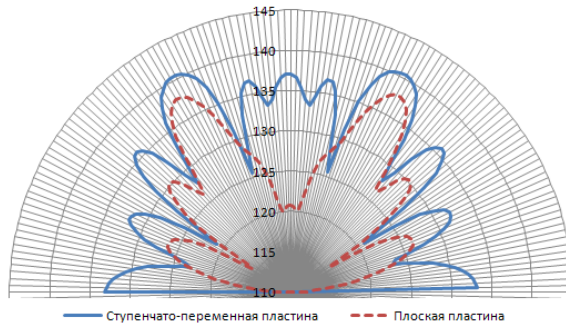


Рис. 5. Диаграмма направленности уровня звукового давления создаваемого излучением плоской и ступенчато-переменной пластины

На рис. 5 отчетливо видно увеличение уровня звукового давления излучения пластины ступенчато-переменной формы по сравнению с плоской пластиной.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод расчета формы колебаний пластины менее требователен к аппаратным ресурсам компьютера, чем метод

конечных элементов при приемлемой точности. Благодаря чему, его можно использовать для решения задачи оптимизации формы пластины с целью увеличения эффективности излучения.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, г/к № П2518.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хмельёв, В. Н. Ультразвуковые многофункциональные и специализированные аппараты для интенсификации технологических процессов в промышленности [Текст] / В. Н. Хмельёв [и др.]. – Барнаул: АлтГТУ, 2007. – 416 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний [Текст] / Бабаков И.М. «Наука» 1968
3. Arthur W Leissa Vibration of Plates [Текст] / Arthur W Leissa 1969
4. Khmelev, V. N. Method of analysis of ultrasonic radiators on the base of flexural vibrations of disks with step-variable form [Текст] / V. N. Khmelev, V. A. Kidanov, A. V. Shalunov, A. V. Galakhov, A. N. Lebedev // International Conference and Seminar on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices EDM 2010. — 2010. — С. 337—340.

*Хмельёв Владимир Николаевич - заместитель директора по НИР, Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО АлтГТУ, тел. (3854) 432581, e-mail: vnh@bti.secna.ru.*

*Киданов Вадим Александрович - студент, Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО АлтГТУ, тел. (3854) 432570, e-mail: kidanov@bti.secna.ru.*

*Шалунов Андрей Викторович - инженер-программист, Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО АлтГТУ, тел. (3854) 432570, e-mail: shalunov@bti.secna.ru.*

*Галахов Антон Николаевич - инженер, Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО АлтГТУ, тел. (3854) 432570, e-mail: galakh@bti.secna.ru.*

*Лебедев Андрей Николаевич - инженер-конструктор, Бийский технологический институт (филиал) ГОУ ВПО АлтГТУ, тел. (3854) 432570, e-mail: lan@bti.secna.ru.*